

UTILIZANDO O WINPLOT PARA ESTUDAR DERIVADAS

Eduardo Machado da Silva¹

Leonor Farcic Fic Menk²

Neste artigo apresentamos algumas experiências realizadas com alunos do 4º semestre do curso de Licenciatura em Matemática com Ênfase em Informática, de uma Universidade particular do interior do estado de São Paulo, com o objetivo de estudar Limites e Derivadas usando o Winplot. As experiências foram baseadas no estudo de Limites de Derivadas.

1. INTRODUÇÃO

Um dos mais importantes ramos da Matemática, o Cálculo Diferencial e Integral, tem suas origens na Grécia Antiga, com Arquimedes e o Método da Exaustão. A partir do século XVII, Newton e Leibniz desenvolvem esse campo de estudo que tem sua fundamentação no final do século XIX.

É indiscutível a importância de se estudar os conceitos básicos de Cálculo Diferencial e Integral, (CDI), em um curso de Licenciatura em Matemática, porém tal disciplina é apontada pelos alunos como uma das mais difíceis e, costuma apresentar um grande número de alunos reprovados. Pode se argumentar que um dos motivos para que isso ocorra é que os alunos, na maioria dos casos, não têm maturidade suficiente para compreender conceitos como o de limites, derivadas e integrais.

Além da imaturidade, Villarreal apresenta em sua tese de doutorado outras causas. Uma delas pode estar relacionada aos obstáculos epistemológicos proposto por Bachelard: “Um obstáculo é uma concepção, possivelmente um conhecimento, que tem sido eficiente para resolver algum tipo de problema, mas fracassa perante outros”.

Outra problemática, apresentada por Villarreal, apontando Franchi é que o ensino tradicional de CDI em sala de aula possui algumas características básicas tais como:

“Aulas expositivas centradas na fala do professor, conteúdos apresentados como prontos e inquestionáveis, sem relação com situações reais, apresentações caracterizadas pela seqüência: definições, enunciados, teoremas e demonstrações, seguidos de cálculo e exercícios.”

¹ Mestrando em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL, Professor do Colégio FEMA, FATEC – Faculdade de Tecnologia campus de Ourinhos e UNIVEM – Centro Universitário Eurípides de Marília.

² Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática pela UEL; Professora da FEMA – Fundação Educacional do Município de Assis

Existem outros fatores apontados por essa autora, mas nosso objetivo neste trabalho não é discutir tais problemas e sim apresentar sugestões que possam auxiliar professores que ministram essa disciplina.

Baseados no fato de que a utilização de software educacionais nos cursos de ensino superior tem aumentado com frequência no decorrer dos anos, nossa proposta é que se utilizem tais ferramentas.

Porém, como alguns deles, necessitam de licença de uso, cujo preço costuma ser pouco acessível, acreditamos que uma solução para resolver esse problema seja a utilização de software livres, pois eles podem ser “baixados” gratuitamente da Internet. Como exemplo, podemos citar: o Winplot, o Winmat, o Wingeo e o Modellus entre outros que podem ser utilizados nas aulas de CDI.

Além disso, muitos problemas estudados nessa disciplina podem ser representados usando a Geometria Analítica (GA). Ou seja, em algumas situações é conveniente o auxílio da visualização gráfica, associada a forma analítica, como parte da resolução. Essa visualização gráfica pode ajudar até mesmo a entender determinados conteúdos como o estudo das derivadas, por exemplo. Portanto, atrelado à visualização gráfica de determinados problemas e/ou conteúdos, a utilização de um computador pode se tornar uma ferramenta útil, já que a maioria dos softwares possui recursos gráficos e de animações.

“A proposta do uso da tecnologia na Educação Matemática como uma das possíveis propostas alternativas para superar estas dificuldades, visando uma transformação do ensino de Cálculo, é apresentada e analisada como proposta didática e como área de pesquisa”. (VILLARREAL, 1999)

Ainda de acordo com a autora:

“O emprego do computador como um mero executor de algoritmos, somente transfere à máquina uma atividade que com lápis e papel é desenvolvida pelos estudantes através da realização de algoritmos que ocupam grande parte dos cursos de Cálculo.”

2. EXPERIÊNCIAS

Neste artigo pretendemos relatar algumas experiências realizadas recentemente em um curso de Licenciatura em Matemática, de uma Universidade particular de uma cidade do interior do estado de São Paulo, trabalhando a disciplina de Aplicativos da Informática. Nessa atividade o conteúdo estudado foi o de derivadas, utilizando o Winplot.

Estes alunos já haviam estudado problemas semelhantes, aos propostos, em uma disciplina de CDI, lecionada no semestre anterior. Porém, a maioria dos alunos ainda apresentava dúvidas,

(alguns até confessaram ter decorado algumas coisas) sobre o estudo de limites de determinadas funções e sobre alguns conceitos que são tidos como básicos no ensino de derivadas.

A seguir, apresentamos algumas experiências.

2.1. Estudo das Derivadas

Um dos tópicos estudados nos cursos de CDI é o estudo das derivadas de uma função. Assim, o objetivo dessa atividade era discutir com os alunos alguns conceitos básicos relacionado com esse tópico. Escolhemos o problema de determinar as retas tangentes ao gráfico de uma função em um ponto dado, já que esse foi um dos problemas estudados por Newton que também motivou o desenvolvimento do CDI. Portanto, nosso objetivo não era apenas executar algoritmos para traçar gráficos e as tangentes a este em um ponto dado com o Winplot, mas também discutir com os alunos as respostas apresentadas por esse software.

Nesta atividade apresentamos um “exemplo simples” para discutir os conceitos iniciais do estudo de derivada. O objetivo era que os alunos descobrissem que o gráfico da derivada da função num determinado ponto coincide com o gráfico da reta tangente nesse ponto. O que motivou a escolha dessa proposta é que esse foi o primeiro exemplo que os alunos estudaram durante a disciplina.

Inicialmente os alunos construíram o gráfico da função $f(x) = x^2$ e em seguida, usando o recurso “derivada” do Winplot encontraram o gráfico da derivada da função. A maioria apresentou como solução os seguintes gráficos:

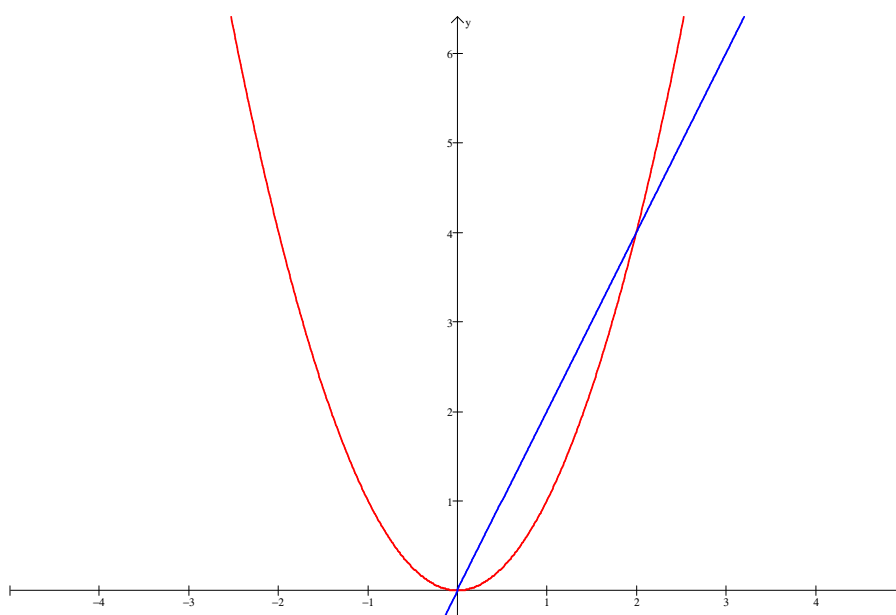


Figura 1: Solução inicial apresentada pelos alunos

Na seqüência, eles foram questionados se a solução estava certa ou se apresentava algum erro e, se apresentava erro qual era ele. Muitos disseram que a solução estava correta, pois foi o computador quem a produziu. Então foram questionados novamente sobre o seguinte fato:

O gráfico da função derivada não deveria ser tangente ao gráfico da função $f(x)$?

Por que o gráfico da derivada não é tangente ao gráfico da função $f(x)$?

Quase todos ficaram confusos e não conseguiram entender porque o gráfico não era tangente. Surgiram vários questionamentos sobre a solução e a maioria disse ter aprendido que a derivada da função $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$ pela regra de “descer” o expoente e subtrair um do mesmo. Neste momento, foi sugerido para que eles demonstrassem, usando a teoria e o conhecimento sobre limites, que a derivada da função $f(x) = x^2$ é $f'(x) = 2x$. Apresentando a solução usando as idéias do conceito de limites, os alunos concluíram que a função derivada é tangente em um ponto x_0 e a derivada mostrada no gráfico anterior é da função derivada em qualquer ponto.

Bem, então como fazer o gráfico da função derivada no ponto $x_0 = 2$, por exemplo?

Novamente os alunos sentiram-se um pouco perdidos e foram levados a revisar como determinar a equação de uma reta. Com um pouco de esforço lembraram que a equação da reta (já estudada na disciplina de GA) era dada por: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

A partir da equação obtida, os alunos construíram com auxílio do software, o gráfico da derivada da função no ponto $x_0 = 2$ obtendo a figura abaixo:

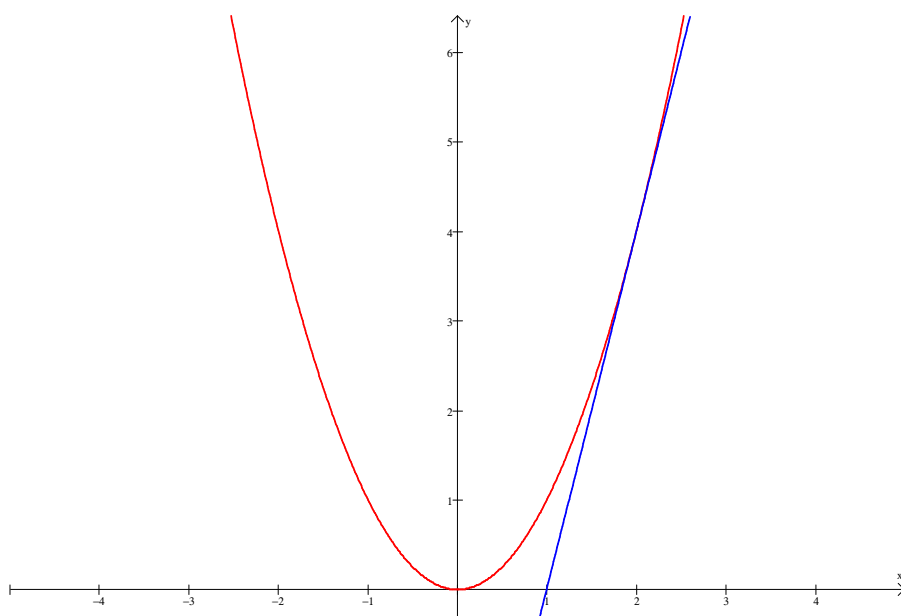


Figura 2: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ em $x_0 = 2$

Calcular a derivada da função em um ponto x_0 dado, passou a ser uma “tarefa fácil” neste momento. Os alunos foram então convidados a procurar “todas” as derivadas em um ponto x_0 qualquer que pertence a um determinado intervalo. No Winplot esse intervalo inicialmente varia entre -10 e 10, mas pode ser alterado para outros valores.

A maioria dos alunos conseguiu resolver o problema usando a equação reta e substituindo no lugar de x_0 um valor para o parâmetro a qualquer. No Winplot o primeiro valor que é atribuído a esse parâmetro é zero. Dessa forma o gráfico obtido foi:

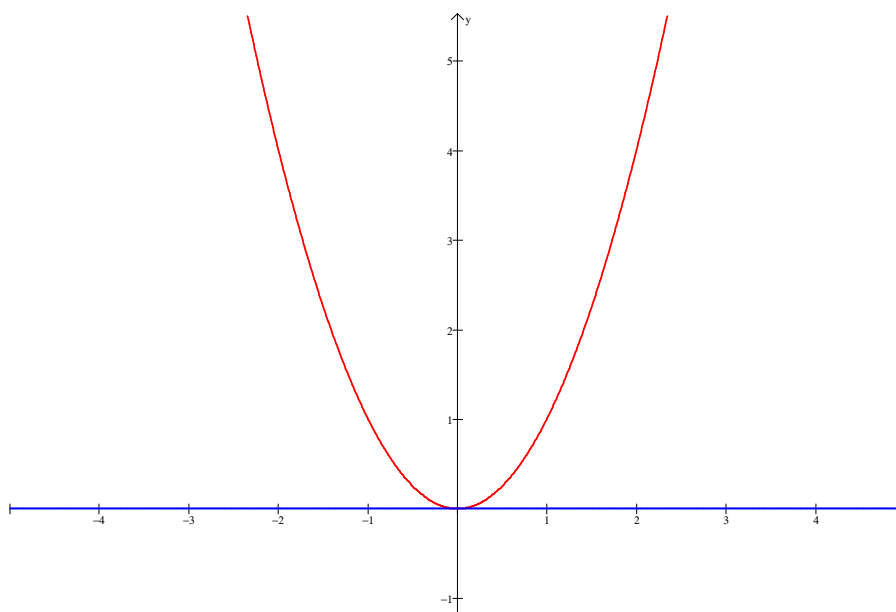


Figura 3: Reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 0$ (parâmetro $a = 0$)

Embora alguns alunos ficassem confusos com a solução, o gráfico está correto, pois, a tangente a $f(x)$ no ponto $x_0 = 0$ coincide com o eixo x . Para verificar as demais derivadas no intervalo fixado foi necessário utilizar o recurso de animação “Anim” disponibilizado pelo Winplot. Utilizando essa ferramenta e fazendo o parâmetro a variar (no intervalo de -10 a 10) os alunos conseguiam ver (e mostrar) “todas” as derivadas deste domínio da função. A figura abaixo mostra alguns desses gráficos:

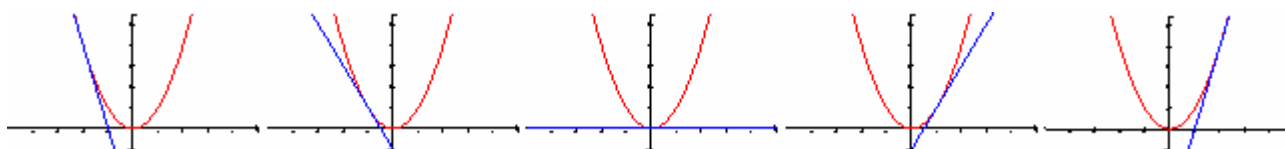


Figura 4: Sequência de retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^2$, nos pontos $x_0 = -2, x_0 = -1, x_0 = 0, x_0 = 1$ e $x_0 = 2$ respectivamente (parâmetro a sendo -2, -1, 0 1 e 2)

Outra idéia explorada pelos alunos nessa etapa foi questionando-os sobre como encontrar o gráfico da reta normal (perpendicular) ao gráfico da função $f(x)$ no ponto x_0 (mesmo ponto no qual o gráfico da derivada é tangente ao gráfico da função). Novamente os alunos foram levados a revisar os conteúdos já estudados nas disciplinas de CDI e GA no semestre anterior. Logo, eles encontraram a resposta para o problema, ou seja, recordaram que a chave para solução é dada por $m_r \cdot m_s = -1$ (m_r coeficiente angular da reta tangente e m_s coeficiente angular da reta normal), ou seja, que o coeficiente da reta normal é dado pelo “inverso do coeficiente angular da reta tangente com o sinal trocado”. Assim, para calcular a reta normal em relação a função $f(x) = x^2$ no ponto

$x_0 = 2$ tem-se: $y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$ que graficamente é dado por:

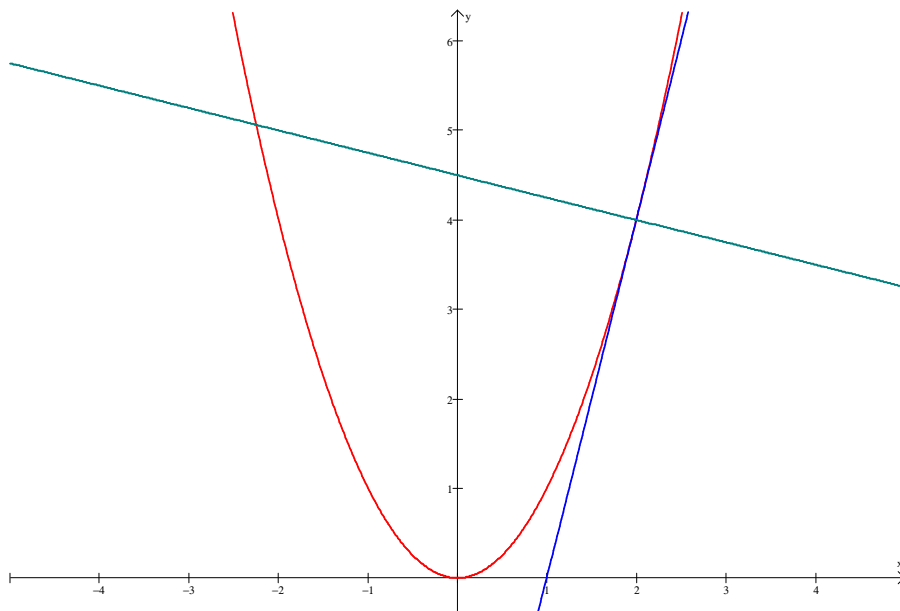


Figura 5: Reta tangente e reta normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto $x_0 = 2$

É claro que essa atividade pode ser estendida para qualquer reta tangente, desde que façamos as alterações necessárias.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Algumas considerações que podemos fazer a partir deste trabalho é que os softwares (pagos ou livres) são ferramentas importantes para auxiliar os alunos a estudar CDI. Aqui realizamos um estudo envolvendo conceitos iniciais de derivada utilizando o Winplot que é um software gratuito disponibilizado na Internet.

O auxílio da visualização gráfica, por meio do software escolhido, revelou-se uma ferramenta importante para a investigação realizada pelos alunos, já que muitas vezes os conceitos não são (ou não foram) demonstrados nos cursos iniciais de CDI ou ainda foram impostos sem nenhuma justificativa.

Além disso, os alunos foram obrigados a revisar conteúdos que haviam sido trabalhados em outras disciplinas, como GA, por exemplo.

Outra consideração importante, é que os participantes do projeto puderam perceber que para operar com um software é preciso saber manipular algumas equações para implementar na linguagem do programa. Não era possível escrever a equação da reta $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ no Winplot, mas sim escrever a forma reduzida $y = f'(x)(x - x_0) + f(x_0)$ da equação anterior, utilizando o comando “equação explícita”. Novamente, os estudantes se encontraram em uma situação na qual foi necessário recordar conceitos estudados anteriormente, como no ensino médio, e revisar os tipos de equações da reta.

Com o auxílio do software os alunos foram encorajados a explorarem novas situações de estudos. Além disso, eles puderam procurar, testar e justificar suas soluções.

É claro que a utilização de recursos computacionais não é uma solução definitiva para os problemas pedagógicos enfrentados por alunos e professores no curso de CDI, mas possibilita criar oportunidades para que se pense, resolva e explore problemas de uma nova forma.

Uma outra consideração a ser feita é que uma vez que o software é livre facilita o acesso ao mesmo. O download do software utilizado pode ser obtido pela rede além de não ter nenhuma licença, ou seja, pode ser instalado em qualquer laboratório de informática de qualquer instituição, pois se trata de um software livre.

4. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ÁVILA, G. **Cálculo das Funções de uma Variável**. LTC editora, 7ª ed., volume 1, 2003.

BARUFI, M. C. B. & LAURO, M. M. **Funções Elementares, Equações e Inequações: Uma Abordagem Utilizando o Microcomputador**. CAEM – IME/USP.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Higyno H. Domingues – Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

GARBI, G. G. **A Rainha das Ciências: Um Passeio Histórico pelo Maravilhoso Mundo da Matemática**. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2006.

GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. LTC: 3ª edição, 1997, volume 1.

LIMA. E. L. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática: Rio de Janeiro, 5ª edição, 2006.

VILLARREAL, M. E. **O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas**. Tese de Doutorado em Educação Matemática, Unesp (Rio Claro), 1999.